BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2010***

ОБ ОДНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ

Р.О. МАСТАЛИЕВ

Институт Кибернетики НАН Азербайджана

mansimov@front.ru

Изучается одна ступенчатая задача оптимального управления, описываемая системой разностных уравнений типа Вольтерра. Доказано необходимое условие оптимальности в форме дискретного принципа максимума Понтрягина. Далее, исследован особый в смысле принципа максимума Понтрягина случай. Сначала получены некоторые вспомогательные формулы. С их помощью выведено общее необходимое условие оптимальности особых в смысле принципа максимума Понтрягина управлений.

1.Постановка задачи. Пусть управляемый процесс описывается системой нелинейных разностных уравнений

$$\begin{cases} z(t+1)=\sum\limits_{\tau=t_0}^{t} f(t,\tau,z(\tau),u(\tau)), \quad t\in T_1=\{t_0,t_0+1,\ldots,t_1-1\}, \\ z(t_0)=z_0, \\ y(t+1)=\sum\limits_{\tau=t_0}^{t} g(t,\tau,y(\tau),v(\tau)), \quad t\in T_2=\{t_1,t_1+1,\ldots,t_2-1\}, \\ y(t_1)=G(z(t_1)), \end{cases} \tag{1}$$

Здесь t_0, t_1, t_2, z_0 - заданы, причем разность t_2-t_1 - натуральное число, $f(t,\tau,z,u)$ $(g(t,\tau,y,v))$ - заданная n (m) - мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z (y), $G(z)$ - заданная дважды непрерывно дифференцируемая m-мерная вектор-функция, $u(t)$ $(v(t))$ - $r(q)$-мерный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества U (V), т.е.

$$\begin{aligned} u(t)\in U\subset R^q, \quad t\in T_1, \\ v(t)\in V\subset R^q, \quad t\in T_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Пару $(u(t),v(t))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением, а соответствующий процесс $(u(t),v(t),z(t),y(t))$ -допустимым процессом.

На решениях задачи (1), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим функционал

$$S(u,v)=\varphi_1\big(z(t_1)\big)+\varphi_2\big(y(t_2)\big). \tag{3}$$

Задача заключается в минимизации функционала (3) при ограничениях (1), (2).

Допустимое управление $\big(u^0(t),v^0(t)\big)$, доставляющее минимум функционалу (3) при ограничениях (1), (2), назовем оптимальным управлением.

2. Вспомогательные факты. Считая $\big(u^0(t),v^0(t),z^0(t),y^0(t)\big)$ оптимальным процессом, через

$\big(\overline{u}(t)=u^0(t)+\Delta u(t),\ \overline{v}(t)=v^0(t)+\Delta v(t),\ \overline{z}(t)=z^0(t)+\Delta z(t),$ $\overline{y}(t)=y^0(t)+\Delta y(t)\big)$ обозначим произвольный допустимый процесс и запишем формулу для приращения функционала:

$$\begin{aligned}\Delta S\big(u^0,v^0\big)&=S(\overline{u},\overline{v})-S\big(u^0,v^0\big)=\\&=\varphi_1\big(\overline{z}(t_1)\big)-\varphi_1\big(z^0(t_1)\big)+\varphi_2\big(\overline{y}(t_2)\big)-\varphi_2\big(y^0(t_2)\big).\end{aligned} \tag{4}$$

Ясно, что $\big(\Delta z(t),\Delta y(t)\big)$ будет удовлетворять системе

$$\begin{cases}\Delta z(t+1)=\sum\limits_{\tau=t_0}^{t}\big[f(t,\tau,\overline{z}(\tau),\overline{u}(\tau))-f\big(t,\tau,z^0(\tau),u^0(\tau)\big)\big]\ \Delta z(t_0)=0,\\ \Delta y(t+1)=\sum\limits_{\tau=t_1}^{t}\big[g(t,\tau,\overline{y}(\tau),\overline{v}(\tau))-g\big(t,\tau,y^0(\tau),v^0(\tau)\big)\big],\\ \Delta y(t_1)=G(\overline{z}(t_1))-G\big(z^0(t_1)\big).\end{cases} \tag{5}$$

Через $\big(\psi^0(t),p^0(t)\big)$ обозначим пока неизвестную $(n+m)$-мерную вектор-функцию. С учетом леммы из [4], показывается справедливость тождеств

$$\begin{aligned}&\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi^{0'}(t)\Delta z(t+1)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=t}^{t_1-1}\psi^{0'}(\tau)\big[f(\tau,t,\overline{z}(t),\overline{u}(t))-f\big(\tau,t,z^0(t),u^0(t)\big)\big]\right],\\ &\sum_{t=t_1}^{t_2-1}p^{0'}(t)\Delta y(t+1)=\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\left[\sum_{\tau=t}^{t_2-1}p^{0'}(\tau)\big[g(\tau,t,\overline{y}(t),\overline{v}(t))-f\big(\tau,t,y^0(t),v^0(t)\big)\big]\right].\end{aligned} \tag{6}$$

С учетом этих тождеств формула приращения (6) записывается в виде:

$$\begin{aligned}\Delta S\big(u^0,v^0\big)&=\varphi_1\big(\overline{z}(t_1)\big)-\varphi_1\big(z^0(t_1)\big)+\varphi_2\big(\overline{y}(t_1)\big)-\varphi_2\big(y^0(t_2)\big)+\psi^{0'}(t_1-1)\Delta z(t_1)+\\&+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi^{0'}(t-1)\Delta z(t)+p^{0'}(t_2-1)\Delta y(t_2)-p^{0'}(t_2-1)\big[G(\overline{z}(t_1))-G\big(z^0(t_1)\big)\big]+\\&+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}p^{0'}(t-1)\Delta y(t)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=t}^{t_1-1}\psi^{0'}(\tau)\big[f(\tau,t,\overline{z}(t),\overline{u}(t))-f\big(\tau,t,z^0(t),u^0(t)\big)\big]\right]-\\&-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\left[\sum_{\tau=t}^{t_2-1}p^{0'}(\tau)\big[g(\tau,t,\overline{y}(t),\overline{v}(t))-g\big(\tau,t,y^0(t),v^0(t)\big)\big]\right].\end{aligned} \tag{7}$$

Введя обозначения

$$H\left(t,z,u,\psi^0\right)=\sum_{\tau=t}^{t_1-1}\psi^{0'}(\tau)f(\tau,t,z,u),\ M\left(t,y,v,p^0\right)=\sum_{\tau=t}^{t_2-1}p^{0'}(\tau)g(\tau,t,y,v),$$

$$N(z)=p^{0'}(t_1-1)G(z),$$

$$\Delta_{\overline{u}(t)}H[t]\equiv H\left(t,z^0(t),\overline{u}(t),\psi^0(t)\right)-H\left(t,z^0(t),u^0(t),\psi^0(t)\right),$$

$$\Delta_{\overline{v}(t)}M[t]\equiv M\left(t,y^0(t),\overline{v}(t),p^0(t)\right)-M\left(t,y^0(t),v^0(t),p^0(t)\right),$$

$$H_z[t]\equiv H_z\left(t,z^0(t),u^0(t),\psi^0(t)\right),\ M_y[t]\equiv M_y\left(t,y^0(t),v^0(t),p^0(t)\right),$$

$$H_{zz}[t]\equiv H_{zz}\left(t,z^0(t),u^0(t),\psi^0(t)\right),\ M_{yy}[t]\equiv M_{yy}\left(t,y^0(t),v^0(t),p^0(t)\right)$$

и используя формулу Тейлора, из (7), после некоторых преобразований, получаем:

$$\begin{aligned}
\Delta S\left(u^0,v^0\right)&=\frac{\partial\varphi_1'\left(z^0(t_1)\right)}{\partial z}\Delta z(t_1)+\frac{\partial\varphi_2'\left(y^0(t_2)\right)}{\partial y}\Delta y(t_2)-\frac{\partial N'\left(z^0(t_1)\right)}{\partial z}\Delta z(t_1)-\\
&-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}H_z'[t]\Delta z(t)-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}M_y'[t]\Delta y(t)+\psi^{0'}(t_1-1)\Delta y(t)+p^{0'}(t_2-1)\Delta y(t_2)+\\
&+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi^{0'}(t-1)\Delta z(t)+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}p^{0'}(t-1)\Delta y(t)+\frac{1}{2}\Delta z'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^0(t_1)\right)}{\partial z^2}\Delta z(t_1)+\\
&+\frac{1}{2}\Delta y'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^0(t_2)\right)}{\partial y^2}\Delta y(t_2)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{\overline{u}(t)}H[t]-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\Delta_{\overline{v}(t)}M[t]-\\
&-\frac{1}{2}\Delta z'(t_1)\frac{\partial^2 N\left(z^0(t_1)\right)}{\partial z^2}\Delta z(t_1)-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\Delta z'(t)H_{zz}[t]\Delta z(t)+2\,\Delta_{\overline{u}(t)}H_z'[t]\Delta z(t)\right]-\\
&-\frac{1}{2}\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\left[\Delta y'(t)M_{yy}[t]\Delta y(t)+2\,\Delta_{\overline{v}(t)}M_y'[t]\Delta y(t)\right]+\eta_1(\Delta \mathrm{u}),
\end{aligned}\tag{8}$$

здесь

$$\eta_1(\Delta u)=0_1\left(\|\Delta z(t_1)\|^2\right)+0_2\left(\|\Delta y(t_2)\|^2\right)-0_3\left(\|\Delta z(t_1)\|^2\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}0_4\left(\|\Delta z(t)\|^2\right)-$$

$$-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}0_5\left(\|\Delta y(t)\|^2\right)-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta z'(t)\Delta_{\overline{u}(t)}H_{zz}[t]\Delta z(t)-\frac{1}{2}\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\Delta y'(t)\Delta_{\overline{v}(t)}H_{yy}[t]\Delta y(t).$$

3. Необходимое условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина. Если предположить, что множества

$$\begin{aligned}
f\left(t,\tau,z^0(\tau),U\right)&=\left\{\alpha:\ \alpha=f\left(t,\tau,z^0(\tau),u\right),\ u\in U\right\},\\
g\left(t,\tau,y^0(\tau),V\right)&=\left\{\beta:\ \beta=g\left(t,\tau,y^0(\tau),v\right),\ v\in V\right\}
\end{aligned}\tag{9}$$

выпуклы, то специальное приращение оптимального управления $\left(u^0(t),v^0(t)\right)$ можно определить формулами:

$$\Delta u_\varepsilon(t) = u(t;\varepsilon) - u^0(t), \qquad t \in T_1,$$
$$\Delta v_\varepsilon(t) = v(t;\varepsilon) - v^0(t), \qquad t \in T_2, \tag{10}$$

здесь $\varepsilon \in [0,1]$ - произвольное число, а $u(t;\varepsilon) \in U$, $t \in T_1$, $v(t;\varepsilon) \in V_2$, $t \in T_2$ такие допустимые управляющие функции, что

$$\Delta_{u(\tau;\varepsilon)} f(t,\tau,z^0(\tau),u^0(\tau)) = \varepsilon\, \Delta_{u(\tau)} f(t,\tau,z^0(\tau),u^0(\tau)),$$
$$\Delta_{v(\tau;\varepsilon)} g(t,\tau,y^0(\tau),v^0(\tau)) = \varepsilon\, \Delta_{v(\tau)} g(t,\tau,y^0(\tau),v^0(\tau)).$$

Здесь $u(t) \in U$, $t \in T_1$, $v(t) \in V$, $t \in T_2$ – произвольные допустимые управления.

Через $(\Delta z_\varepsilon, \Delta y_\varepsilon(t))$ обозначим специальное приращение оптимальной траектории $(z^0(t), y^0(t))$, соответствующее специальному приращению (10) оптимального управления $(u^0(t), v^0(t))$.

Используя дискретный аналог леммы Гроноулла-Беллмана (см., напр., [5]) убеждаемся в справедливости оценок:

$$\|\Delta z_\varepsilon(t)\| \le L\varepsilon,\ t \in T_1 \cup t_1,\ \|\Delta y_\varepsilon(t)\| \le L\varepsilon,\ t \in T_2 \cup t_2. \tag{11}$$

С учетом (10) и (11) из (8) получаем справедливость разложения:

$$\Delta S_\varepsilon(u^0,v^0) = S(u^0 + \Delta u_\varepsilon,\ v^0 + \Delta v_\varepsilon) - S(u^0,v^0) =$$
$$= -\varepsilon\left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{u(t)} H[t] + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \Delta_{v(t)} M[t]\right] + 0(\varepsilon).$$

Из последнего разложения следует

Теорема 1. Если множества (9) выпуклы, то для оптимальности допустимого управления $(u^0(t), v^0(t))$ в задаче (1)-(3) необходимо, чтобы для всех $u(t) \in U$, $t \in T_1$, $v(t) \in V$, $t \in T_2$ выполнялись, соответственно, соотношения

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{u(t)} H[t] \le 0, \tag{12}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1} \Delta_{v(t)} M[t] \le 0. \tag{13}$$

Соотношения (12), (13) представляют собой аналог дискретного принципа максимума для рассматриваемой задачи.

4. Особые в смысле принципа максимума Понтрягина управления. В этом пункте изучается случай вырождения дискретного условия максимума в одном частном случае. Из (5) следует, что $(\Delta z(t), \Delta y(t))$ является решением следующей линеаризованной системы:

$$\begin{cases} \Delta z(t+1) = \sum\limits_{\tau=t_0}^{t} \left[f_z[t,\tau]\Delta z(\tau) + \Delta_{\bar u(\tau)} f[t,\tau]\right] + \sum\limits_{\tau=t_0}^{t} \left[\Delta_{\bar u(\tau)} f_z[t,\tau] + 0_6(\|\Delta z(\tau)\|)\right], \\ \Delta z(t_0) = 0, \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases}\Delta y(t+1)=\sum_{\tau=t_1}^{t}\left[g_y[t,\tau]\Delta y(\tau)+\Delta_{\bar v(\tau)}g[t,\tau]\right]+\sum_{\tau=t_1}^{t}\left[\Delta_{\bar v(\tau)}g_y[t,\tau]+0_7(\|\Delta y(\tau)\|)\right],\\ \Delta y(t)=G_z(z^0(t_1))\Delta z(t_1)+0_8(\|\Delta z(t_1)\|).\end{cases} \quad (15)$$

Интерпретируя системы (14), (15) как линейные неоднородные разностные уравнения Вольтерра относительно $\Delta z(t)$, $\Delta y(t)$, соответственно, на основании результатов работ [1,6] получаем:

$$\Delta z_\varepsilon(t)=\varepsilon\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\left[\sum_{s=\tau}^{t-1}R_1(t,s+1)\Delta_{u(\tau)}f[s,\tau]\right]+0(\varepsilon), \quad (16)$$

$$\Delta y_\varepsilon(t)=\varepsilon\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\left[\sum_{s=\tau}^{t-1}R_2(t,s+1)\Delta_{v(\tau)}g[s,\tau]\right]+$$
$$+R_2(t,t_1)G_z(z^0(t_1))\Delta z_\varepsilon(t_1)+0(\varepsilon)\,. \quad (17)$$

Здесь $R_i(t,\tau)$ $(i=1,2)$ - матричные функции соответствующих размерностей являющихся решениями задач

$$R_1(t+1,\tau)=\sum_{s=\tau}^{t}R_1(t+1,s+1)f_z[s,\tau],\ \tau\le t\,,\ R_1(t+1,t+1)=E_1\,,$$

$$R_2(t+1,\tau)=\sum_{s=\tau}^{t}R_2(t+1,s+1)g_y[s,\tau],\ \tau\le t\,,\ R_2(t+1,t+1)=E_2\,,$$

где E_i $(i=1,2)$ - единичные матрицы.

Представление (17), с учетом (16), записывается в виде

$$\Delta y_\varepsilon(t)=\varepsilon\left\{\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\left[\sum_{s=\tau}^{t-1}R_2(t,s+1)\Delta_{v(\tau)}g[s,\tau]\right]+\right.$$
$$\left.+\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{s=\tau}^{t_1-1}R_2(t,t_1)G_z(z^0(t_1))R_1(t_1,s+1)\Delta_{u(\tau)}f[s,\tau]\right]\right\}+0(\varepsilon). \quad (18)$$

Пусть

$$\begin{aligned}f(t,\tau,z,u)&=A(t,\tau)f_1(\tau,z,u),\\ g(t,\tau,y,v)&=B(t,\tau)g_1(\tau,y,v).\end{aligned} \quad (19)$$

Тогда представления (16), (18) принимают, соответственно, вид:

$$\Delta z_\varepsilon(t)=\varepsilon\sum_{\tau=t_0}^{t-1}Q_1(t,\tau)\Delta_{u(\tau)}f_1[\tau]+0(\varepsilon), \quad (20)$$

$$\Delta y_\varepsilon(t)=\varepsilon\left\{\sum_{\tau=t_1}^{t-1}Q_2(t,\tau)\Delta_{v(\tau)}g_1[\tau]+\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}Q_3(t,\tau)\Delta_{u(\tau)}f_1[\tau]\right\}+0(\varepsilon), \quad (21)$$

здесь

$$Q_1(t,\tau)=\sum_{s=\tau}^{t-1}R_1(t,s+1)A(s,\tau),\ Q_2(t,\tau)=\sum_{s=\tau}^{t-1}R_2(t,s+1)B(s,\tau),$$

$$Q_3(t,\tau)=\sum_{s=\tau}^{t_1-1} R_2(t,t_1)G_z\left(z^0(t_1)\right)R_1(t_1,s+1)A(s,\tau).$$

Определим матричные функции $K_i(\alpha,\beta)$ ($i=1,2$) следующим образом:

$$K_1(\alpha,\beta)=-Q_1'(t_1,\alpha)\left[\frac{\partial^2\varphi_1\left(z^0(t_1)\right)}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 N\left(z^0(t_1)\right)}{\partial z^2}\right]Q_1(t_1,\beta)+$$

$$+\sum_{t=\max(\alpha,\beta)+1}^{t_1-1} Q'(t,\alpha)H_{zz}[t]Q(t,\beta)+\sum_{t=t_1}^{t_2-1} Q_3'(t,\tau)M_{yy}[t]Q_3(t,\tau),$$

$$K_2(\alpha,\beta)=-Q_2'(\alpha,t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\left(y^0(t_2)\right)}{\partial y^2}Q_2(\beta,t_2)+$$

$$+\sum_{t=\max(\alpha,\beta)+1}^{t_2-1} Q_2'(t,\alpha)M_{yy}[t]Q_2(t,\beta).$$

Определение. Если для всех $u(t)\in U$, $t\in T_1$, $v(t)\in V$, $t\in T_2$ выполняются, соответственно, соотношения

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\Delta_{u(t)}H[t]\equiv 0,$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\Delta_{v(t)}M[t]\equiv 0,$$

то, следуя, например, [2-4], допустимое управление $\left(u^0(t),v^0(t)\right)$ назовем особым в смысле принципа максимума Понтрягина управлением.

Используя представления (20), (21) при помощи разложения (8) доказывается следующая

Теорема 2. Если множества (9) выпуклы, то для оптимальности особого в смысле принципа максимума Понтрягина управления $\left(u^0(t),v^0(t)\right)$ в задаче (1)-(3), (19) необходимо, чтобы выполнялись соотношения:

$$\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=t_0}^{t_1-1}\Delta_{u(\alpha)}f_1'[\alpha]K_1(\alpha,\beta)\Delta_{u(\beta)}f_1[\beta]+$$

$$+2\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\alpha=t_0}^{t-1}\Delta_{u(t)}H_z'[t]Q_1(t,\alpha)\Delta_{u(\alpha)}f_1[\alpha]\right]\le 0$$

для всех $u(t)\in U$, $t\in T_2$,

$$\sum_{\alpha=t_1}^{t_2-1}\sum_{\beta=t_1}^{t_2-1}\Delta_{v(\alpha)}g_1'[\alpha]K_2(\alpha,\beta)\Delta_{v(\beta)}g_1[\beta]+$$

$$+2\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\left[\sum_{\alpha=t_1}^{t-1}\Delta_{v(t)}M'_y[t]Q_2(t,\alpha)\Delta_{v(\alpha)}g_1[\alpha]\right]\leq 0$$

для всех $v(t)\in V$, $t\in T_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ивинская Е.В., Колмановский В.Б. Об ограниченности решений некоторых разностных уравнений Вольтерра // Автоматика и телемеханика, 2000, №8, с.89-97.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М: Наука, 1973, 256 с.
3. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку: БГУ, 2002, 114 с.
4. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: Элм, 1999, 174 с.
5. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М: Наука, 1980, 400 с.
6. Колмановский В.Б. Об асимптотической эквивалентности решений некоторых разностных уравнений Вольтерра // Автоматика и телемеханика, 2001, №4, с.47-55.

DİSKRET SİSTEMLƏRLƏ BİR PİLLƏVARİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

R.O.MƏSTƏLİYEV

XÜLASƏ

Volterra tipli fərq tənliklər sistemi ilə təsvir olunan bir pilləvarı optimal idarəetmə məsələsi öyrənilir. Optimallıq üçün diskret maksimum prinsipi tipli zəruri şərt isbat olunur. Daha sonra Pontryaginin maksimum prinsipi mənada məxsusi hal tədqiq olunmuşdur. Əvvəlcə köməkçi düsturlar alınmışdır. Onların köməyilə Pontryaginin maksimum prinsipi mənada məxsusi idarələrin optimallığı üçün ümumi zəruri şərt isbat olunmuşdur.

ON A STEPPED PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL BY DISCRETE SYSTEMS

R.O.MASTALIYEV

SUMMARY

A stepped problem of optimal control described by a system of difference equations of the Volterra type is studied. The necessary optimality condition in the form of Pontryagins discrete principle of maximum has been proved. Singular in the sense of Pontryagins principle of maximum case has been studied further.